

Contexte

On considère des matériaux **hétérogènes** dont les propriétés (physiques, mécaniques,...) varient à l'échelle ε et sont **aléatoires**.

But : On cherche à calculer les **propriétés macroscopiques** du matériau à partir de ses **propriétés microscopiques** (à l'échelle ε).

On prendra pour exemple l'équation de la conductivité thermique, en dimension d , avec un matériau composite constitué de deux phases A_1 et A_2 .

À l'échelle fine, le problème s'écrit:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(\frac{x}{\varepsilon}, \omega) \nabla u_\varepsilon(x, \omega)) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On obtient par la théorie de l'homogénéisation, sous réserve d'hypothèses usuelles sur A (stationnarité...), que :

- $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_*$, **déterministe**
- u_* est solution de l'équation (1) avec un **coefficient homogénéisé** (ou **effectif**) A^* constant et déterministe : $-\nabla \cdot (A^* \nabla u_*) = f$ sur Ω , $u_* = 0$ sur $\partial\Omega$.
- Le coefficient **homogénéisé** A^* est **indépendant** de f .

Approximation de u_ε en cas de **séparation des échelles** ($\varepsilon \ll \text{diam}(\Omega)$) :

1. **Estimation** de A^* en résolvant, pour plusieurs réalisations de A , une équation dite du **correcteur** posée sur $[-N, N]^d$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(x, \omega) (\nabla w_i^N(x, \omega) + e_i)) = 0 & \text{dans } Q_N = [-N, N]^d, \\ w_i^N(\cdot, \omega) & Q_N\text{-périodique.} \end{cases} \quad (2)$$

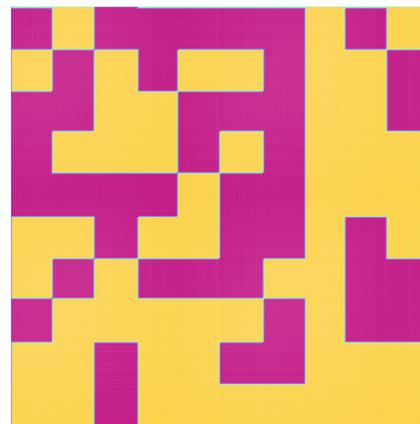
$$A_{i,j}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_N|} \int_{Q_N} (\nabla w_i^N + e_i) \cdot (A(\nabla w_j^N + e_j))$$

2. **Approcher** u_ε par u_*

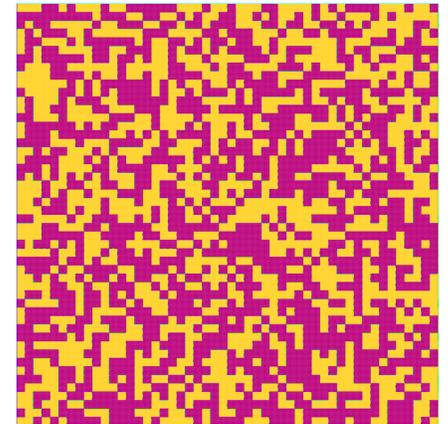
Question : Sachant que u_ε est **aléatoire**, peut-on caractériser ses **fluctuations** autour de son **comportement moyen** ?

Exemple du damier aléatoire :

- $\Omega = [0, 1]^2$
- En notant $Q = [0, 1]^d$ la cellule unité, $A(\frac{x}{\varepsilon}, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{Q+k}(\frac{x}{\varepsilon}) X_k(\omega)$, X_k variables aléatoires i.i.d valant soit A_1 soit A_2
- Ainsi, sur chaque case de taille ε :
 $\mathbb{P}(A = A_1) = 0.5$
 $\mathbb{P}(A = A_2) = 0.5$



(a) Réalisation pour $\varepsilon = \frac{1}{10}$



(b) Réalisation pour $\varepsilon = \frac{1}{50}$

Étude des fluctuations

Pour étudier les **fluctuations localisées** (par un choix d'une fonction g), on va considérer la **variable aléatoire** :

$$I^\varepsilon(g) = \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \int_{\Omega} (u_\varepsilon(x, \omega) - \mathbb{E}[u_\varepsilon(x, \omega)]) g(x) dx$$

D'après [1] qui considère un cadre un peu différent, on a que $I^\varepsilon(g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, variable aléatoire **gaussienne centrée** de variance σ^2 . La variance dépend de ∇u_*^f , ∇u_*^g et d'un tenseur \mathcal{Q} d'ordre 4, **indépendant** de f et g .

En posant $Q_L = [-L, L]^d$, on a : $\mathcal{Q}_{ijkl} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_L|} \text{Cov} \left(\int_{Q_L} \rho_{ij}, \int_{Q_L} \rho_{kl} \right)$, avec ρ_{ij} une fonction aléatoire dépendant de ∇w_i , ∇w_j , A et A^* .

Connaissance de \mathcal{Q} et $A^* \implies$ **Connaissance des fluctuations** de u_ε pour tous les termes sources f

Objectifs :

- Trouver une **stratégie numérique efficace** pour estimer \mathcal{Q}
- Utiliser \mathcal{Q} , pour connaître **a priori** les fluctuations de u_ε sans résoudre (1) à l'échelle ε

Résultats théoriques

Le cadre qui nous intéresse est un peu différent de celui de [1].

Cas 1D :

- $I^\varepsilon(g) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- Preuve effectuée pour des CL de Neumann et Dirichlet homogènes
- Taux de convergence de l'approximation de \mathcal{Q}

Cas faiblement aléatoire ($d \geq 2$) :

- $A(x, \omega) = A_{per}(x) + \eta \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{Q+k}(x) X_k(\omega)$, avec $\eta \ll 1$ et X_k v.a centrée i.i.d
- $\frac{I^\varepsilon(g)}{\eta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Résultats numériques

Approche pour estimer les fluctuations :

1. Estimer \mathcal{Q} via une méthode Monte-Carlo en utilisant des réalisations du correcteur tronqué ∇w_i^N et une estimation de A^*
2. Dédire σ_{as}^2 , la variance asymptotique via \mathcal{Q} , ∇u_*^f et ∇u_*^g

Evaluation de la qualité de l'approche : comparaison de σ_{as}^2 avec σ_{em}^2 variance empirique de $I^\varepsilon(g)$ estimée à partir d'une méthode de Monte-Carlo, en résolvant (1).

Interprétation résultats :

- Précision satisfaisante (erreur relative $\leq 5\%$) pour $N \approx 5L$
- Régime asymptotique atteint rapidement ($\varepsilon \leq \frac{1}{30}$)
- Gain de temps considérable

Application dans le cas du damier aléatoire :

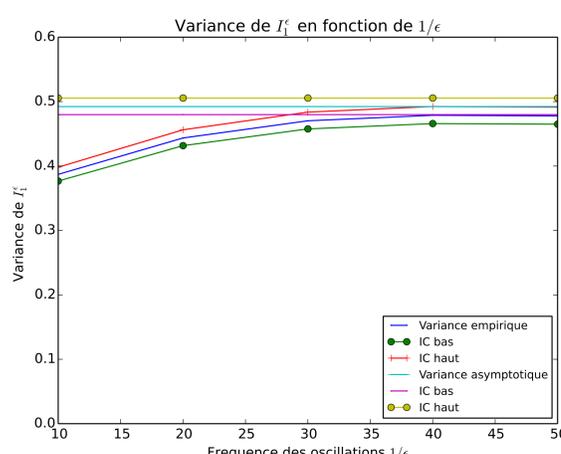


Figure 1 : Comparaison entre σ_{as}^2 et $\sigma_{em}^2(\varepsilon)$ avec leurs intervalles de confiance (10000 réalisations, $N = 40$ et $L = 8$)

Conclusion

Partie numérique :

- σ_{as}^2 est une bonne approximation de σ_{em}^2
- Estimation de \mathcal{Q} précise pour N et L raisonnables, mais nécessite beaucoup de réalisations.

Résultats théoriques :

- Étude effectuée dans le cas 1D et dans le cas faiblement aléatoire pour $d \geq 2$
- Comprendre comment doivent être choisis les différents paramètres numériques (N , L et M) les uns par rapport aux autres.

Références

- [1] Mitia Duerinckx, Antoine Gloria, and Felix Otto. The structure of fluctuations in stochastic homogenization. *arXiv preprint arXiv:1602.01717*, 2016.